C*-álgebras de dimensión finita

1. Toda C*-álgebra de dimensión finita A tiene unidad: todas las normas en A son equivalentes entre sí, así que la bola unidad cerrada es compacta. Luego toda unidad aproximada tiene una subred convergente, necesariamente a la unidad.

2. Hay una biyección entre ideales de A y proyecciones centrales: a cada ideal I le corresponde la proyección p_I: la unidad de I; a cada proyección central p le corresponde el ideal Ap que ella genera.

3. Si $Z(A) = C(\{1, \ldots, m\})$ y $p_j \sim \chi_{\{j\}}$, entonces toda proyección central es suma de las p_j. $A = \oplus_{j=1}^m Ap_j$, y cada Ap_j es simple. Luego A tiene exactamente $\dim Z(A)$ ideales simples no nulos.

4. Suponemos ahora que A es una C*-álgebra de dimensión finita simple. Sea $C = C(\{1, \ldots, n\})$ una C*-subálgebra conmutativa maximal de A, y sea $e_j \sim \chi_{\{j\}}$. Se tiene:

   - Si $x, y \neq 0$, entonces $xAy \neq 0$: porque si no $(AxA)y = 0$, lo cual contradice que el ideal generado por x es todo A.
   - $e_jAe_j = \mathbb{C}e_j$: por la maximalidad de C debe ser $e_jAe_j \subseteq C$, y por lo tanto $e_jAe_j \subseteq e_jCe_j = \mathbb{C}e_j$.
   - Para cada j sea $u_j \in e_1Ae_j$ de norma 1. Entonces u_j es una isometría parcial ("de e_j a e_1"):

     $$u_j^* u_j = e_j, \quad u_j u_j^* = e_1.$$

   - Ahora definimos $u_{ij} := u_i^* u_j$. Entonces $\{u_{ij}\}$ es un s.u.m. ("sistema de unidades matriciales") es decir: $\sum_{i=1}^n u_{ii} = 1$, $u_{ij}^* = u_{ji}$, y $u_{ij}u_{kl} = \delta_{jk}u_{il}$ (u_{ij} es una isometría parcial "de e_j a e_i").
   - Dado $a \in A$:

     $$e_iae_ju_{ji} = e_iae_ju_j^*u_i \in e_iAe_i = \mathbb{C}e_i.$$

     Entonces existe un único $\lambda_{ij}(a) \in \mathbb{C}$ tal que $e_iae_ju_{ji} = \lambda_{ij}(a)e_i$, y por lo tanto $e_iae_j = \lambda_{ij}(a)u_{ij}$.
   - Si $a \in A$: $a = (\sum_{i=1}^n e_i)a(\sum_{j=1}^n e_j) = \sum_{i,j=1}^n e_iae_j = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(a)u_{ij}$.

- Se concluye que $\phi : A \to M_n(\mathbb{C})$ tal que $\phi(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(a) E_{ij}$ es un isomorfismo de C*-álgebras.

Por lo tanto se tiene:
Teorema. *Si A es una C^*-álgebra de dimensión finita, entonces existen $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}^+$ tales que*

$$A \cong M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_m}.$$

Además es $m = dim\, Z(A)$, y los enteros $n_1, \ldots, n_m$ son únicos a menos de permutaciones.

Homomorfismos

Un homomorfismo de $M_q \to M_p$ se puede ver como una representación $\varphi : \mathsf{K}(\mathbb{C}^q) \to \mathsf{B}(\mathbb{C}^p)$. Dicha representación es suma directa de la parte no degenerada de φ más una representación nula (que puede ser de dimensión 0). A su vez, la parte no degenerada es suma directa de representaciones cíclicas y, como es de dimensión finita, es a la postre suma de representaciones irreducibles. Pero, a menos de equivalencia unitaria, hay una única tal representación, que es la inclusión natural. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $kq \leq p$, y a menos de equivalencia unitaria es

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}_k(a) & 0_{p-kq} \\ 0_{p-kq} & \mathrm{diag}_{p-kq}(0) \end{pmatrix},$$

donde, si $b \in M_m$, $\mathrm{diag}_n(b) \in M_{mn}$ es la matriz que tiene n bloques iguales a b en la diagonal, y es nula en el resto de las entradas. Por ejemplo si $b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, entonces $\mathrm{diag}_2(b) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Nótese que el homomorfismo φ es unital sii $p = kq$.

También indicaremos por $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matriz que tiene por bloques diagonales a las matrices $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y 0 en el resto de las entradas. Por ejemplo $\mathrm{diag}_k(b) = \mathrm{diag}(\overbrace{b, \ldots, b}^{k})$.

Ahora, cada homomorfismo de $\varphi : \oplus_{j=1}^{r} M_{q_j} \to M_p$ se descompone como una r-upla $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, donde $\varphi_j : M_{q_j} \to M_p$ es un homomorfismo. Luego, a menos de equivalencia unitaria, φ queda determinado por una r-upla $(k_1, \ldots, k_r)$, tal que $\sum_{j=1}^{r} k_j q_j \leq p$, que indica que

$$\varphi(a) = \operatorname{diag}(\varphi_1(a), \varphi_2(a), \ldots, \varphi_r(a), \overbrace{0, \ldots, 0}^{p - \sum_{j=1}^{r} k_j q_j}).$$

Cada k_j indica "cuántas veces se coloca M_{q_j} en M_p". Como antes, observamos que φ es unital si y sólo si $\sum_{j=1}^{r} k_j q_j = p$

Siguiendo la misma línea de razonamiento, cada homomorfismo

$$M_{q_1} \oplus \cdots \oplus M_{q_r} \to M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_s}$$

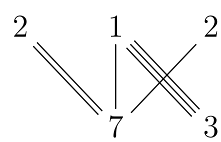
corresponde a s homomorfismos $M_{q_1} \oplus \cdots \oplus M_{q_r} \to M_{p_i}$, $1 \leq i \leq s$, lo que da lugar a una matriz $k_\varphi = (k_{ij}) \in M_{s \times r}(\mathbb{N})$, llamada ***matriz de multiplicidades de*** φ donde k_{ij} indica la multiplicidad de M_{q_j} en M_{p_i}, de modo que se tiene:

$$\sum_{j=1}^{s} k_{ij} q_j \leq p_i, \ \forall i = 1, \ldots, s.$$

A este homomorfismo lo llamaremos ***estándar***. Notar que φ es unital si y sólo si $k_\varphi \vec{q} = \vec{p}$, donde $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_r)$ y $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_s)$. También se puede representar el homomorfismo φ por su ***diagrama de Bratteli***, ilustrado en el ejemplo siguiente.

Ejemplo.

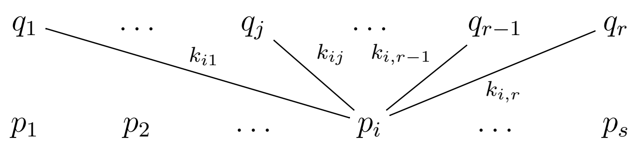
$M_2 \oplus M_1 \oplus M_2 \to M_7 \oplus M_3$ dado por la matriz $(k_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, corresponde al diagrama:



En general, el diagrama de Bratteli del homomorfismo

$$\varphi : M_{q_1} \oplus \cdots \oplus M_{q_r} \to M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_s}$$

codificado en la matriz (k_{ij}) es un grafo con $r+s$ vértices dispuestos en dos niveles. En el primer nivel los vértices son nombrados con los tamaños de las matrices de los sumandos directos del dominio de φ, y en el segundo con los tamaños de las matrices de los sumando directos del codominio de φ. Entre el j-ésimo vértice del primer nivel y el i-ésimo del segundo hay k_{ij} aristas (o una arista con peso k_{ij}, como en la figura siguiente):



1. C*-álgebras aproximadamente finitas

1.1. Límites inductivos

1. Consideraremos sólo sistemas directos $\{A_n \overset{\varphi_n}{\to} A_{n+1}\}_{n\geq 1}$. Se define $\varphi_{nn} = Id_{A_n}$, y para $n < m$: $\varphi_{nm} : A_n \to A_m$ inductivamente a través de $\varphi_{n,m+1} := \varphi_m\varphi_{nm}$. Por lo tanto si $n \leq m \leq l$ es $\varphi_{nl} = \varphi_{ml}\varphi_{nm}$.

2. El producto $\prod_{n\geq 1} A_n$ es una *-álgebra.

3. $A_0 := \{\mathsf{a} = (a_1, a_2, \dots) : \exists n_{\mathsf{a}}$ tal que $a_{n+1} = \varphi_n(a_n)\, \forall n \geq n_{\mathsf{a}}\}$. Es una *-subálgebra de $\prod_{n\geq 1} A_n$.

4. $p : A_0 \to [0, \infty)$ tal que $p(\mathsf{a}) := \mathrm{lím}_n \|a_n\|$ está bien definida y es una C*-seminorma.

5. Sea A la completación de Hff de (A_0, p). Para cada n definimos $\varphi^n : A_n \to A$ como $\varphi^n(a_n) = [(\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}, a_n, \varphi_n(a_n), \dots)]$. Entonces los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\varphi^n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\varphi^{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

6. El par $\varinjlim\{A_n, \varphi_n\} := (A, \{\varphi^n\})$ se llama ***límite directo***, o ***límite inductivo***, o también ***límite inyectivo***, y satisface la propiedad

universal siguiente: si B es una C*-álgebra y para cada n se tiene un homomorfismo $\psi_n : A_n \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\psi^{n+1}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

entonces existe un único homomorfismo $\psi : A \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\varphi^n"'] \arrow[dr, "\psi^n"] & \\ A \arrow[rr, "\psi"'] & & B \end{tikzcd}$$

7. La sucesión $\{\varphi^n(A_n)\}_{n\geq 1}$ de C*-subálgebras de A es creciente y su unión es densa en A.

8. ***Ejercicio.*** Sean $\{A_n \stackrel{\varphi_n}{\to} A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ un sistema directo y $(n_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{Z}^+$ una sucesión estrictamente creciente. Se definen $B_k := A_{n_k}$ y $\psi_k : B_k \to B_{k+1}$ como $\psi_k := \varphi_{n_k n_{k+1}}$. Mostrar que

$$\varinjlim\{A_n \stackrel{\varphi_n}{\to} A_{n+1}\}_{n\geq 1} = \varinjlim\{B_k \stackrel{\varphi_n}{\to} B_{k+1}\}_{k\geq 1}.$$

9. **Teorema.** Si $J \lhd A$, entonces $J_n := J \cap \varphi^n(A_n) \lhd \varphi^n(A_n)$, y $J = \overline{\cup_{n\geq 1} J_n}$.

   Demostración. Es claro que $J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq J$, $\forall n$, de modo que basta mostrar que $J \subseteq \overline{\cup_{n\geq 1} J_n}$. Sea entonces $x \in J$ y $\epsilon > 0$, existe $a_n \in \varphi^n(A_n)$ tal que $\|x - a_n\| < \epsilon/2$. Si (u_λ) es una unidad aproximada de J, sea λ_0 tal que $\|x - u_{\lambda_0} x\| < \epsilon/2$. Entonces $u_{\lambda_0} a_n \in J_n$, y

$$\|x - u_{\lambda_0} a_n\| \leq \|x - u_{\lambda_0} x\| + \|u_{\lambda_0}(x - a_n)\| < \epsilon,$$

   lo que concluye la prueba.

10. **Teorema.** Si cada A_n es simple, entonces A es simple.

    Demostración. Si $J \lhd A$ es no nulo, entonces debe existir n tal que $J_n \neq 0$ (usamos la notación de la demostración previa), y por lo tanto $J_n = \varphi^n(A_n)$, ya que $\varphi^n(A_n)$ es simple. Pero entonces $J_m = \varphi^m(A_m)$ $\forall m \geq n$, y por lo tanto $J \supseteq \cup_n \varphi^n(A_n)$. Luego $J = A$.

11. Supongamos que $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ es un homormorfismo del sistema directo $\{A_n \overset{\varphi_n}{\to} A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ en el sistema directo $\{B_n \overset{\psi_n}{\to} B_{n+1}\}_{n\geq 1}$, es decir, cada η_n es un homomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\eta_n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\eta_{n+1}"] \\ B_n \arrow[r, "\psi_n"'] & B_{n+1} \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo n. Si $\varinjlim\{B_n, \psi_n\} = (B, \{\psi^n\})$, entonces los triángulos

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi^n\eta_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\psi^{n+1}\eta_{n+1}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

son conmutativos, y por lo tanto existe un único homomorfismo $\varinjlim \eta_n : A \to B$ tal que para todo n el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\varphi^n"'] \arrow[dr, "\psi^n\eta_n"] & \\ A \arrow[rr, "\eta:=\varinjlim \eta_n"'] & & B \end{tikzcd}$$

Se deduce que el límite directo es un functor.

12. ***Ejercicio.*** Supongamos que $\{A_n \overset{\varphi_n}{\to} A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ y $\{B_n \overset{\psi_n}{\to} B_{n+1}\}_{n\geq 1}$ son sistemas directos, y que $\{A_{2n-1} \overset{\eta_n}{\to} B_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ y $\{B_{2n} \overset{\eta'_n}{\to} A_{2n}\}_{n\geq 1}$ son sucesiones de homomorfismos tales que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\eta_1"] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\eta_2"] & A_4 \arrow[r, "\varphi_4"] & \cdots \\ B_1 \arrow[r, "\psi_1"'] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[u, "\eta'_1"'] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"'] & B_2 \arrow[r, "\psi_4"'] \arrow[u, "\eta'_2"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

es conmutattivo. Probar que $\varinjlim \eta_n : \varinjlim A_{2n-1} \to \varinjlim B_{2n-1}$ es un isomorfismo, cuyo inverso es $\varinjlim \eta'_n : \varinjlim B_{2n} \to \varinjlim A_{2n}$.

1.2. AF-Álgebras

1. **Definición.** Se dice que A es una C*-álgebra aproximadamente finita, o más brevemente una ***AF-álgebra***, si es el límite inductivo de un sistema numerable de C*-álgebras de dimensión finita. Equivalentemente, si es la clausura de una sucesión numerable creciente de C*-subálgebras de dimensión finita.

2. Supongamos que $\{A_n \overset{\varphi_n}{\to} A_{n+1}\}_{n\geq 1}$ es un sistema directo de C*-álgebras de dimensión finita, y sea A su límite. Entonces A es una AF-álgebra. Combinando los diagramas de Bratteli de cada homomorfismo $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ se obtiene un grafo infinito, que se llama diagrama de Bratteli de A. Por ejemplo, si $A_n = M_{n!}$ y $\varphi_n(a) = \operatorname{diag}_{n+1}(a)$, entonces se obtiene el diagrama

$$1 \overset{2}{\text{———}} 2! \overset{3}{\text{———}} 3! \overset{4}{\text{———}} 4! \overset{5}{\text{———}} \cdots$$

Con no poco trabajo se pueden probar el siguiente par de resultados:

3. **Teorema.** Sea A una C*-álgebra. Entonces A es AF sii es separable y satisface la siguiente propiedad: $\forall \epsilon > 0$ *y* $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$ *existe una C*-subálgebra* B *de* A*, de dimensión finita, tal que dist*$(a_i, B) < \epsilon$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

4. **Teorema.** Sea $A = \overline{\cup_{n\geq 1} A_n} = \overline{\cup_{n\geq 1} B_n}$ una AF-álgebra que se obtiene a partir de las dos sucesiones crecientes de C*-álgebras de dimensión finita $\{A_n\}_{n\geq 1}$ y $\{B_n\}_{n\geq 1}$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $U_\epsilon \in \mathcal{U}(\tilde{A}\,)$, con $\|U_\epsilon - Id\| < \epsilon$, tal que

$$\cup_{n\geq 1} A_n = U_\epsilon \cup_{n\geq 1} B_n U_\epsilon^*,$$

de modo que las *-álgebras $\cup_{n\geq 1} A_n$ y $\cup_{n\geq 1} B_n$ son isomorfas. En particular hay sucesiones estrictamente crecientes $\{m_k\}_{k\geq 1}$ y $\{n_k\}_{k\geq 1}$ en $\mathbb{N}$ tales que $\forall k$ se tiene:

$$A_{m_k} \subseteq U_\epsilon B_{n_k} U_\epsilon^* \subseteq A_{m_{k+1}}.$$

5. Los ideales y cocientes de una AF-álgebra A son también AF-álgebras, y se pueden identificar completamente en "el" diagrama de Bratteli de A.

1.2.1. UHF-Álgebras

1. Sea $\mathfrak{S} := \{\sigma : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+\}$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}$, definimos $\sigma! : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ como $\sigma!(n) := \sigma(n)\sigma(n-1)\cdots\sigma(2)\sigma(1)$.

2. Si $\sigma \in \mathfrak{S}$, se define $\epsilon_\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ como:
$$\epsilon_\sigma(r) := \sup\{k \in \mathbb{N} : \ r^k \text{ divide a algún } \sigma!(n)\}.$$

3. Para $\sigma \in \mathfrak{S}$ consideremos el sistema directo $M_{\sigma!(n)}\varphi_n M_{\sigma!(n+1)}$, donde φ_n es el hm estándar unital. Sea M_σ el correspondiente límite inductivo. Las álgebras M_σ se llama ***álgebras de Glimm***, o también ***uniformly hyperfinite algebras***.

4. **Teorema.** Si $M_\sigma \cong M_{\sigma'}$, entonces $\epsilon_\sigma = \epsilon_{\sigma'}$.

   Para la demostración precisamos algún material previo:

   a) **Lema 1.** Sean p, q proyecciones en una C*-álgebra con unidad A, tales que $\|p-q\| < 1$. Entonces existe $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $q = upu^*$ y $\|1-u\| \leq \sqrt{2}\|p-q\|$. Concretamente es $u = v|v|^{-1}$, donde $v = 1 - p - q + 2qp$.

   Prueba. Cálculos directos dan $v^*v = 1 - (q-p)^2 = vv^*$, de modo que v es normal. También es invertible porque $v^*v = vv^*$ es invertible, ya que $\|1 - v^*v\| = \|(q-p)^2\| = \|(q-p)\|^2 < 1$. Luego $u := v|v|^{-1}$ es unitario. Ahora:
$$vp = (1-p-q+2pq)p = p-p-qp+2qp = qp = q(1-p-q+2pq) = qv,$$
   de manera que $pv^* = v^*q$. Entonces $pv^*v = v^*qv = v^*vp$. Entonces p conmuta con V^*v, y por lo tanto con $|v|$ y $|v|^{-1}$. Luego $up = v|v|^{-1}p = vp|v|^{-1} = qv|v|^{-1} = qu$, es decir, $q = upu^*$.
   Ahora: $\mathrm{Re}(v) = \frac{(1-p-q+2qp)+(1-p-q+2pq)}{2} = 1-(q-p)^2 = vv^*$, y por lo tanto $\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(v)\,|v|^{-1} = |v|$. Por lo tanto:
$$\|1-u\|^2 = \|(1-u^*)(1-u)\| = 2\|(1-\mathrm{Re}(u)\| = 2\|1-|v|\| \leq 2\|1-|v|^2\|,$$
   donde la última desigualdad es consecuencia de ser $1-t \leq 1-t^2$ para todo $t \in \sigma(|v|) \subseteq [0,1]$. Y como $1-|v|^2 = (q-p)^2$, se deduce que $\|1-u\| \leq \sqrt{2\|(p-q)^2\|} = \sqrt{2}\|p-q\|$. ■

b) **Lema 2.** Sea a un elemento autoadjunto de una C*-álgebra A tal que $\|a\| \leq 1$ y $\|a - a^2\| < 1/4$. Entonces existe una proyección $p \in A$ tal que $\|a - p\| < 1/2$.

Prueba. Se puede suponer que $A = C_0(X)$. La hipótesis implica que $|a|(x) \neq \frac{1}{2}$, $\forall x \in X$. Entonces $S := |a|^{-1}\big([\frac{1}{2}, +\infty)\big) = |a|^{-1}\big((\frac{1}{2}, +\infty)\big)$ es abierto y cerrado en X, y por lo tanto $p := \chi_S \in A$. Y es $\|a - p\| = \text{máx}\{\|a - p\|_S, \|a\|_{S^c}\} < 1/2$. ■

c) Un estado $\tau : B \to \mathbb{C}$ es *tracial* si $\tau(xy) = \tau(yx)$, $\forall x, y \in B$.

d) **Proposición.** El único estado tracial de M_n es $\text{Tr} : M_n \to \mathbb{C}$ tal que $\text{Tr}(a) := \frac{1}{n}(a_{11} + \cdots + a_{nn})$. En efecto, M_n está generado por las proyecciones de rango 1 (por el teorema espectral), y cada par de tales proyecciones son unitariamente equivalentes, por lo que una traza queda determinada por su valor en cualquiera de ellas.

e) Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de C*-subálgebras unitales de la C*-álgebra unital A (todas con la misma unidad que A), con $A = \overline{\cup_{n\geq 1} A_n}$, y en cada A_n hay un único estado tracial τ_n, y para todo n se tiene $\tau_n = \tau_{n+1}|_{A_n}$, entonces A tiene un único estado tracial τ, y es $\tau_n = \tau|_{A_n}$, $\forall n$.

Demostración del teorema.

a) Sean $\pi : M_\sigma \to M_{\sigma'}$ un isomorfismo, $\varphi^n : M_{\sigma!(n)} \to M_\sigma$ y $\psi^n : M_{\sigma'!(n)} \to M_{\sigma'}$ los mapas naturales.

b) Basta mostrar que $\epsilon_\sigma \leq \epsilon_{\sigma'}$.

c) Para eso es suficiente mostrar que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\sigma!(n)$ divide a $\sigma'!(m)$.

d) La sucesión de estados traciales $\tau_{\sigma!(n)}$ define un estado tracial $\tau : M_\sigma \to \mathbb{C}$.

e) Fijado n, sea p una proyección de rango 1 de $M_{\sigma!(n)}$. Como $\tau\varphi^n$ es el estado tracial de $M_{\sigma!(n)}$, se tiene $\tau(\varphi^n(p)) = \frac{1}{\sigma!(n)}$.

f) $\pi(\varphi^n(p))$ es una proyección en $M_{\sigma'}$ existen $m \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in M_{\sigma'!(m)}$ autoadjunto tales que $\|a\| \leq 1$ y

$$\|\pi(\varphi^n(p)) - \psi^m(a)\| < \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad \|\pi(\varphi^n(p)) - \psi^m(a^2)\| < \frac{1}{8},$$

de donde se deduce que $\|a - a^2\| < \frac{1}{4}$.

g) Entonces (**Lema 2**) existe una proyección $q \in M_{\sigma'!(m)}$ tal que $\|a - q\| < \frac{1}{2}$, y entonces, intercalando $\psi^m(a)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\pi(\varphi^n(p)) - \psi^m(q)\| &\leq \|\pi(\varphi^n(p)) - \psi^m(a)\| + \|\psi^m(a) - \psi^m(q)\| \\ &< 1/8 + 1/2 < 1.\end{aligned}$$

Luego las proyecciones $\pi(\varphi^n(p))$ y $\psi^m(q)$ son unitariamente equivalentes (**Lema 1**), y por lo tanto τ' coincide en ellas. Ahora:

$$\tau'(\psi^m(q)) = \tau'(\pi\varphi^n(p)) = \tau\varphi^n(p) = 1/\sigma!(n).$$

Pero $\tau'\psi^m$ es el estado tracial de $M_{\sigma'!(m)}$, así que $\tau'(\psi^m(q))$ debe ser de la forma $d/\sigma'!(m)$ para algún entero positivo d. Entonces resulta que $\sigma'!(m) = d\sigma!(n)$. Listo.

5. **Corolario.** Hay una cantidad no numerable de clases de isomorfismo de UHF álgebras.

   Demostración. Sea $\{r_n\}_{n\geq 1}$ una numeración de los primos. Dada $\sigma \in \mathfrak{S}$, sea $\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}$ tal que $\bar{\sigma}(n) := r_n^{\sigma(n)}$. Es claro que el mapa $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ es inyectivo, y como $\mathfrak{S}$ es no numerable, la imagen de dicho mapa también lo es. Por otro lado, ϵ es inyectivo en esa imagen, pues $\epsilon_{\bar{\sigma}}(r_n) = \sigma(n)$.